Examen de Análisis de Variable Compleja
Cuarto curso de Matemáticas (Fundamental)
3 de junio de 2000

1. Integrando una conveniente función compleja a lo largo de la frontera de la mitad superior del anillo $A(0;\varepsilon,R)$, $0<\varepsilon<1, 2<R$, calcular la integral:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log(x)}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx$$

2. Dados un número natural n y dos números reales distintos de cero a y b, determínese el número de ceros del polinomio $z^{2n}+az^{2n-1}+b^2$ situados en el semiplano de la derecha.

3. Sea $f\in\mathcal{H}(D(0,1))$ tal que $|f(z)|<1$ para todo $z\in D(0,1)$. Supongamos que $z_1,z_2,\ldots,z_n$ son ceros de f. Justifíquese que para $|z|<1$ es

$$|f(z)| \leqslant \prod_{j=1}^{n} \frac{|z-z_j|}{|1-\overline{z_j}z|}$$

¿Qué puede afirmarse si $z_j\neq 0$, $(1\leqslant j\leqslant n)$, y $f(0)=z_1z_2\ldots z_n$?

4. Sea f una función holomorfa e inyectiva en $\mathbb{C}^*=\mathbb{C}\setminus\{0\}$ verificando que $f(z)\neq 0$ para todo $z\in\mathbb{C}^*$. Pruébese que hay un número complejo $\alpha\neq 0$ tal que o bien $f(z)=\alpha z\ \ \forall z\in\mathbb{C}^*$, o bien $f(z)=\dfrac{\alpha}{z}\ \ \forall z\in\mathbb{C}^*$.

5. Sea f una función holomorfa que no se anula en el anillo $A(0;1,2)$. Pruébese que hay un entero $n\in\mathbb{Z}$, y una función g holomorfa en dicho anillo, tal que $f(z)=z^n\exp(g(z))$ para todo $z\in A(0;1,2)$.